Progressão Geométrica

De onde partir

✓ É legal saber os conceitos de sequência, compreender que uma sequência de produtos sucessivos equivale a uma potenciação e saber utilizar uma taxa de aumento a partir de um favor multiplicativo (1 + i)

Onde você vai chegar

✓ Será capaz de calcular termos genéticos de uma sequência, tal como a soma de uma coletânea de termos de uma sequência

✓ Perceber qual a relação entre as posições de termos de uma sequência e o número de razões utilizadas para ir do primeiro a um termo qualquer da sequência

Teoria

Seja a sequência numérica dada por:

$$(2, 6, 18, 54, 162\ldots)$$

Essa sequência não é uma progressão aritmética, pois a diferença entre dois termos consecutivos não é uma constante. Contudo, podemos destacar outro padrão para essa sequência numérica, já que cada termo é o triplo do termo anterior.

Em outras palavras, podemos notar que a razão entre um termo qualquer dessa sequência e seu antecedente é sempre igual a 3 (a partir do segundo). .

$$\frac{6}{2} = 3; \quad \frac{18}{3} = 3; \quad \frac{54}{18} = 3; \quad \frac{162}{54} = 3; \ldots$$

Definição

Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência numérica de números reais na qual a razão entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante). Essa constante é a chamada razão da P.G. e é indicada por q.

Classificações de uma P.G.

De acordo com o sinal da razão, podemos classificar as Progressões Geométricas da seguinte forma:

- Progressão geométrica crescente: $a_1 > 0$ **e** $q > 1$
  Exemplo: $(5, 10, 20, 40, 80, \ldots) \rightarrow a_1 = 5$ e $q = 2$

- Progressão geométrica decrescente: $a_1 > 0$ **e** $0 < q < 1$
  Exemplo: $\left(243, 81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right) \rightarrow a_1 = 243$ e $q = \frac{1}{3}$

- Progressão geométrica alternada: $a_1 \neq 0$ **e** $q < 0$
  Exemplo: $(1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots) \rightarrow a_1 = 1$ e $q = -2$

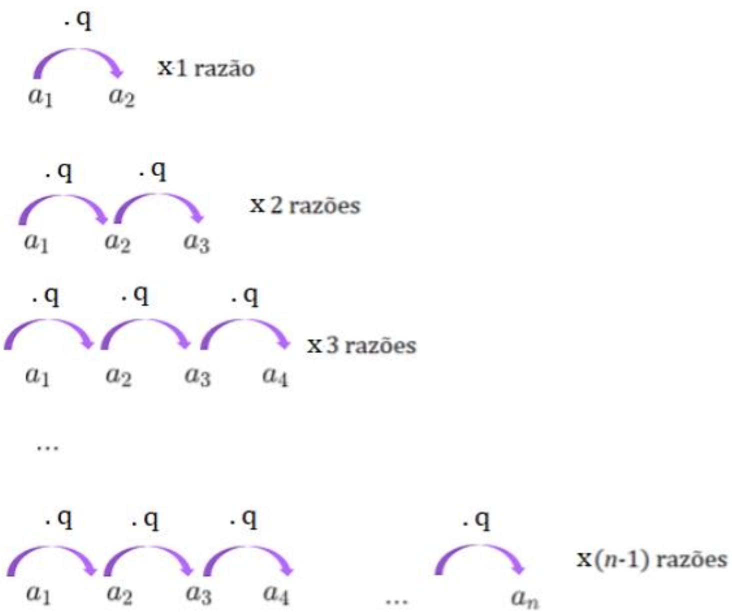
- Progressão geométrica constante: $q = 1$
  Exemplo: $(7, 7, 7, 7, 7, 7, \ldots) \rightarrow q = 1$

Termo geral da P.G.

Sejam:
a_n um termo genérico da P.G.
a_1 o $1^{\text{º}}$ termo da P.G.
n a posição do termo
q é a razão da P.G.

Observe a imagem abaixo. Ela mostra que para ir de a_1 para a_2, devemos multiplicar a_1 pela razão. Para ir de a_1 para a_3, multiplicamos por duas razões. Para irmos de a_1 para a_4, multiplicamos por três razões, e assim sucessivamente. Em linhas gerais, o número de razões que devemos multiplicar o termo a_1 para que cheguemos a um termo a_n qualquer é sempre uma unidade menor do que a posição desse termo.

Por exemplo, para encontrar o vigésimo termo de uma sequência a partir do a_1, deveríamos pensar que $a_{20} = a_1 \cdot \underbrace{(q \cdot q \cdot \ldots \cdot q)}_{19\,razões} = a_1 \cdot q^{19}$.



Por isso, a expressão que nos permite obter um termo qualquer da P.G. é dada por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplo: Dada a P.G. $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots)$ calcule o seu décimo primeiro termo.

Primeiro calculamos: $q = \frac{a_2}{a_1} \rightarrow \; q = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} \rightarrow q = \frac{8}{4} = 2.$

Logo o décimo primeiro termo será:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_{11} = a_1 \cdot q^{11-1} \rightarrow a_{11} = \frac{1}{8} \cdot 2^{10} \rightarrow a_{11} = \frac{1}{8} \cdot 1024 \rightarrow a_{11} = 128.$$

A expressão anterior do termo geral de uma progressão geométrica se baseia no primeiro termo da sequência. Contudo, podemos determinar uma expressão para o termo geral a partir de qualquer termo da P.G.. Isto é, como para irmos de um termo a_k ao termo a_n precisamos multiplicar a_k por $(n-k)$ razões, temos:

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k}; \quad n > k$$

Obs.: Perceba que essa fórmula para o termo geral é muito parecida com a anterior, só trocamos 1 por k, visto que estamos achando a_n a partir do $k - ésimo$ termo da sequência, e não mais do primeiro.

Propriedades de uma P.G.

1ª propriedade: Trio de termos consecutivos da P.G.

Dados três termos consecutivos de uma PG, então o termo médio é igual à média geométrica dos outros dois. Assim, se os termos consecutivos são dados por (a_{n-1}, a_n, a_{n+1}), então

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Exemplo: Se em um P.G. temos que $(\ldots, 12, x, 192, \ldots)$, podemos determinar x por

$$x = \sqrt{12 \cdot 192} = \sqrt{2.304} \rightarrow x = 48$$

As duas próximas propriedades são generalizações dessa primeira.

2ª propriedade: Termo central.

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma progressão geométrica em que o número de termos n é ímpar. Assim, existe um termo central para essa sequência representado por a_c. Em uma progressão geométrica com n termos, sendo n igual a um número ímpar, o termo central é indicado por a_c e é calculado da seguinte forma:

$$a_c = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$$

Exemplo: Na P.G. $(3, ?, ?, x, ?, ?, 192)$, podemos determinar x, que é central em relação aos extremos, a partir de:

$$x = \sqrt{3 \cdot 192} = \sqrt{576} \rightarrow x = 24$$

3ª propriedade: Termos equidistantes.
Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma progressão geométrica. Dizemos que dois termos são equidistantes quando o número de termos que antecede o primeiro é igual ao número de termos que sucede o segundo. A seguir, temos alguns pares de termos que expressam termos equidistantes:

- a_1 e a_n são os extremos da sequência e são extremos.
- a_2 e a_{n-1} são termos equidistantes dos extremos.
- a_3 e a_{n-2} são termos equidistantes dos extremos.
- a_1 e a_5 são termos equidistantes do termo a_3.
- a_6 e a_{14} são termos equidistantes do termo a_{10}.
  ...

A propriedade dos termos equidistantes dos extremos de uma PG é dada por:

"Podemos utilizar a média geométrica para calcular o termo central a partir de tais termos equidistantes".

Exemplo: Se a_6 e a_{14} são termos equidistantes ao termo a_{10}, vale que $a_{10} = \sqrt{a_6 \cdot a_{14}}$.

Propriedades de soma e produto dos termos de uma P.G.

Soma dos n primeiros termos (S_n):
Dada uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ cuja razão q é diferente de 1, a soma de seus n primeiros termos é representada por S_n, isto é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

E o valor dessa soma é obtido por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Exemplo: A soma das primeiras potências de expoente natural de dois $(1, 2, 4, 8, \dots, 512)$ é:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023$$

Soma dos infinitos termos (S_∞):
Para alguns tipos de progressões geométricas, podemos calcular o valor do limite da soma de seus infinitos termos. Essas sequências são chamadas de progressões geométricas convergentes e se caracterizam por ter a razão entre -1 e 1, ou seja, $-1 < q < 1$. Para calcularmos a soma de seus infinitos termos, usamos a fórmula abaixo:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo: Observe a dízima periódica $0{,}999\ldots$

a) Escreva-a como uma soma de termos de uma P.G. decrescente e de razão $0{,}1$.

b) A partir do item anterior, utilize a fórmula de soma de infinitos termos da P.G. para determinar a fração geratriz da dízima $0{,}999\ldots$

Resolução:

a) $0{,}999\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots$

b) $0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}9}{1-0{,}1} = \frac{0{,}9}{0{,}9} = 1.$

Sim, podemos dizer que $0{,}999\ldots = 1$. Isso ocorre porque o número $0{,}999\ldots$ converge para 1. Não se convenceu? Pense que quando dois números são diferentes, existe sempre um número entre eles. Por exemplo, 3 e 4 são diferentes porque existem números entre eles, como o $3{,}5$, o $3{,}24$ e o π. Os números $0{,}99$ e 1 são diferentes porque existem números entre eles, como o $0{,}995$ e o $0{,}993$.

Porém, perceba que, como $0{,}999\ldots$ é uma dízima periódica, esse número não possui fim. Assim, não há nenhum número entre ele e o 1. Consequentemente, eles devem ser iguais!

Obs.: você sempre pode determinar a fração geratriz de uma dízima periódica utilizando a fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita e decrescente.

Produto dos n primeiros termos (P_n)

Dada uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$, podemos calcular o produto de seus n primeiros termos a partir da fórmula:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Exemplo: o produto dos termos da sequência $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, -16\right)$ é igual a

$$P_n = \sqrt{\left(\frac{1}{8} \cdot (-16)\right)^8} = \sqrt{(-2)^8} = (-2)^4 = 16$$

Se liga!

Usamos a letra q para representar a razão de uma P.G. por ela ser obtida a partir do **q**uociente de um termo qualquer da sequência (a partir do segundo) e o termo anterior. E na P.A.? Porque usamos r? Achou que era de razão? Na verdade, é de **r**esto, uma vez que o resultado da subtração entre dois números é chamado de resto e essa é operação que usamos para determinar a razão de uma P.A.

Na Cultura

A taxa de transmissão de um vírus, também chamada de número de reprodução, é um conceito que foi primeiramente usado para medir a reprodução das pessoas, ou seja, para contabilizar o quanto uma população está aumentando ou diminuindo. Na medicina, esse uso foi adaptado e ampliado para medir o perfil de uma doença quanto à sua disseminação na população. Quando dizemos que a taxa de transmissão de um vírus é X, podemos entender que cada pessoa infectada transmite o vírus para X indivíduos.

Adaptado de http://coronavirus.saude.mg.gov.br/blog/. Acesso em 05/12/2020.

A taxa de transmissão passou a aparecer muito na mídia com a pandemia do Covid-19. No final de março de 2021 a taxa de transmissão do covid-19 no Brasil era igual a $1,12$. Isso significa 100 pessoas contaminadas irão transmitir o vírus para outras 112. Se essa taxa se mantivesse constante, o número de contaminados cresceria conforme uma P.G. de razão $1,12$ (uma pessoa transmite o vírus para outras “$1,12$” pessoas, que transmite para outras “$1,12$” pessoas e assim sucessivamente). Por isso, dizemos que o quando a taxa de transmissão fica abaixo de 1, isso indica uma tendência de desaceleração de contágio. De fato, quando a razão da P.G. está entre 0 e 1, ela é decrescente.

Exercícios

1. Um capital de $R\$5.000$ é investido de modo que ele rende $R\$12{,}00$ por mês. Sobre esse cenário, faça o que se pede:

a) Escreva os termos da sequência cujos elementos são os valores acumulados com essa aplicação a partir do primeiro mês (isto é, com $a_1 = 5012$).

b) Os valores vistos na sequência acima representam uma P.A.? Se sim, qual sua razão?

c) Se essa aplicação for feita até que sejam acumulados $R\$5276{,}00$, quantos meses se passaram desde o início dessa aplicação (momento em que tínhamos $R\$5000{,}00$ acumulados)? Utilize em seus cálculos o termo geral da P.A.

d) Considere a função $f(x) = 12x + 5000$. Calcule $f(23)$.

e) Esses dois objetos matemáticos, progressão aritmética e função afim, possuem alguma relação? O que os coeficientes a e b dessa função representam que elementos do termo geral da progressão?

2. Ao fazer o financiamento de sua casa na Caixa Econômica Federal, consideram-se diversos fatores, como renda mensal bruta, se a pessoa realizou financiamentos anteriores, se o cliente é do setor público, dentre outros. Uma pessoa escolheu um plano que utiliza o Sistema de Amortização Constante. Nele, as parcelas iniciais costumam ser mais altas e vão reduzindo de valor ao longo do tempo. Nesse financiamento, um imóvel avaliado em $R\$100.000{,}00$, estipulava-se um pagamento em X parcelas mensais. Os valores dos encargos (resultantes da soma entre o valor da prestação mensal e outras tarifas) a serem pagos em cada parcela diminuem a cada mês de forma constante. Observe:

Parcela	Valor da parcela (em reais)
1	844,85
2	843,43
3	842,01
...	...
X	249,87

Dessa forma:

a) Determine o valor de X. Isso significa que o pagamento das parcelas irá durar quantos anos?

b) Determine o valor pago no total nesse financiamento, sabendo que, além das parcelas, essa pessoa teve de pagar $R\$10.000{,}00$ de entrada.

c) Calcule em quanto o total obtido anteriormente excedeu o valor estimado do imóvel.

Caso queira realizar sua própria simulação de financiamento de um imóvel, clique **aqui**.

Gabaritos

1. **E**

Temos uma P.G. de $a_1 = 10$ e $r = \frac{1}{10} = 0{,}1$.
Assim, calculamos a soma infinita:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10}{1-0{,}1} = \frac{10}{0{,}9} = \frac{100}{9}$$

2.

a) Fevereiro: $100 \cdot 1{,}005 + 100$

b) Março: $(100 \cdot 1{,}005 + 100) \cdot 1{,}005 + 100 = 100 \cdot 1{,}005^2 + 100 \cdot 1{,}005 + 100$

c) Abril:
$(100 \cdot 1{,}005^2 + 100 \cdot 1{,}005 + 100) \cdot 1{,}005 + 100 = 100 \cdot 1{,}005^3 + 100 \cdot 1{,}005^2 + 100 \cdot 1{,}005 + 100$
As expressões são formadas por somas. Cada termo dessa soma é um produto de 100 pelo fator de aumento elevado a um expoente que equivale a uma unidade a menos que o mês correspondente (fevereiro = expoente 1, março = expoente 2, etc).

d) No final de trinta e seis meses teremos: $100 \cdot 1{,}005^{35} + 100 \cdot 1{,}005^{34} + \cdots + 100 \cdot 1{,}005 + 100$.
Para calcular essa soma, podemos usar uma soma de P.G. Tal P.G. possui 36 termos. O primeiro dela pode ser considerado igual a 100, o último igual a $100 \cdot 1{,}005^{35}$ e a razão igual a $1{,}005$. Logo,

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{100(1{,}005^{36} - 1)}{1{,}005 - 1} = \frac{100(1{,}2 - 1)}{1{,}005 - 1} = \frac{100 \cdot 0{,}2}{0{,}005} = R\$4.000{,}00$$